

## Originalarbeiten

### **Modelle zur Bestimmung einer optimalen Ernährung in privaten Haushalten**

M. Steinel

Institut für Sozialökonomik des Haushalts, Technische Universität München, Freising

#### **Models for the determination of an optimal nutrition in private households**

*Zusammenfassung:* In privaten Haushalten haben die Mitglieder unterschiedliche Nährstoffbedarfe. Sie verzehren im allgemeinen gleiche Speisen in unterschiedlichen Mengen. Der Speisenplan ist bedarfsgerecht, wenn er den Empfehlungen für die Nährstoffzufuhr der einzelnen Personen entspricht. Er ist akzeptabel, wenn er den Verzehrgewohnheiten der Personen entspricht. Er ist optimal, wenn er die genannten Bedingungen einhält und zusätzlich ein gegebenes Ziel bestmöglich erreicht. Die Bestimmung eines optimalen Speisenplans erfolgt anhand von Modellen. Es ist das Ziel des Beitrags, verschiedene Modelle zur Bestimmung einer optimalen Ernährung darzustellen und im Hinblick auf ihre Eignung zur Anwendung auf Entscheidungsprobleme im privaten Mehrpersonenhaushalt zu beurteilen. Je geringer die modellinterne Einschränkung in der Variabilität von Lebensmittelmengen, Speisenarten und/oder Speisemengen, desto bessere ‚optimale‘ Lösungen können mit dem Modell gefunden werden. Eine simultane Bestimmung von Speisenart und -menge erfüllt den Modellzweck besser als eine sukzessive Bestimmung. Dies konnte anhand eines Beispielsproblems gezeigt werden.

*Summary:* Members of private households have different nutrient requirements. In general, they eat the same dishes in different quantities. The menu plan is admissible if it corresponds to the recommended dietary allowances. It is acceptable if it meets the eating habits. It is optimal if it meets the constraints mentioned and best reaches an objective. It is the aim of this paper to describe models for the determination of optimal nutrition and to evaluate them with respect to their suitability for solving decision problems in private, multi-person-households. The fewer the model-internal restrictions in the variability of quantities of food stuffs, kind and/or quantities of dishes, the better are the “optimal” solutions that are found with the model. A simultaneous determination of kind and quantity of dishes reaches the model purpose better than a stepwise determination. This is shown in an example problem.

*Schlüsselwörter:* Lineare Programmierung, Ernährungsoptimierung, Privathaushalt, Optimierungsmodelle

*Key words:* Linear programming – nutrition optimization – private households – optimization models

#### **1 Problemstellung und Zielsetzung**

Im Bereich Ernährung ist der private Haushalt mit folgendem Problem konfrontiert. Die verschiedenen Mitglieder des Haushalts haben einen unterschiedlichen Nährstoffbedarf. Seitens der Ernährungswissenschaft, vertreten durch die Deutsche Gesellschaft für Ernährung, werden für die Deckung des Nährstoffbedarfs Empfehlungen für die Nährstoffzufuhr herausgegeben. Der Haushalt ist bestrebt, diese Empfehlungen für die Nährstoffzufuhr seiner Haushaltsmitglieder einzuhalten. Ein Speisenplan, der den

Empfehlungen für die Nährstoffzufuhr entspricht, wird bedarfsgerechter Speisenplan genannt. Die Personen verzehren nicht Nährstoffe, sondern entsprechend ihren Verzehrsgewohnheiten Speisen. Ein weiterer Aspekt der Verzehrsgewohnheiten liegt darin, daß der Haushalt bezüglich der Art der Speisen und der Speisemenge mehr oder weniger festgelegt ist. Bezüglich der Speisenart kann entweder bereits jede einzelne zu verzehrende Speise vorgegeben sein oder eine Anzahl von Speisen kann zur Auswahl stehen, wobei bestimmte Kombinationen akzeptiert und bestimmte Kombinationen nicht akzeptiert werden. Bezüglich der Speisemenge bestehen für jedes Haushaltsmitglied und jede Speise bestimmte Unter- und Obergrenzen, innerhalb derer Speisemengen akzeptiert werden. Ein Speisenplan, der den Verzehrsgewohnheiten entspricht, wird akzeptabler Speisenplan genannt. I.d.R. verzehren die Personen eines Haushalts gleiche Speisen in unterschiedlichen Mengen.

Die Umsetzung der Empfehlungen für die Nährstoffzufuhr für die einzelnen Personen und der Verzehrsgewohnheiten in einen konkreten, bedarfsgerechten und akzeptablen Speisenplan stellt ein komplexes Problem dar, das in einem mathematischen Modell abgebildet werden kann. In einem solchen Modell stellen die Speisen (Speisenart und/oder Speisemenge) die Variablen und die Empfehlungen für die Nährstoffzufuhr und die Verzehrsgewohnheiten die Bedingungen (Gleichungen bzw. Ungleichungen) dar. Wenn es eine Lösung des Entscheidungsproblems gibt, gibt es i.d.R. unendlich viele. Aus der Menge der möglichen Lösungen kann eine eindeutige (sog. optimale) gefunden werden, wenn das System von Bedingungen um ein Ziel erweitert wird. Ein bedarfsgerechter, akzeptabler Speisenplan ist also optimal, wenn er ein gegebenes Ziel unter Einhaltung der gegebenen Bedingungen bezüglich der Nährstoffzufuhr und der Verzehrsgewohnheiten bestmöglich erreicht.

In der Literatur wurden eine Reihe von Modellen zur Bestimmung einer optimalen Ernährung beschrieben. Es ist das Ziel des vorliegenden Beitrags, verschiedene Modelle zur Bestimmung einer optimalen Ernährung darzustellen und im Hinblick auf ihre Eignung zur Lösung der genannten Entscheidungssituation im privaten Haushalt zu beurteilen.

## **2 Darstellung der Modelle**

In der Literatur wurden mathematische Modelle zur Bestimmung einer optimalen Ernährung v.a. zu zwei verschiedenen Zwecken aufgestellt. Der eine Zweck ist die Bestimmung der Minimalkosten einer bedarfsgerechten Ernährung. Diese Modelle werden beispielsweise angewendet für die Bestimmung der Kosten des Lebensunterhalts (27, 5, 18, 15) oder für einen Vergleich verschiedener Preissituationen (27, 6, 7). Der andere Zweck ist die Bestimmung eines bedarfsgerechten, akzeptablen Speisenplans. Die Modelle wurden entsprechend ihres Zwecks mit unterschiedlichen Schwerpunkten aufgestellt und sind deshalb verschieden.

In jedem Modell ist ein Ziel formuliert, das unter Einhaltung von bestimmten Bedingungen bestmöglich zu erreichen ist. Die folgenden Ausführungen beschränken sich weitgehend auf solche Modelle, die eine Minimierung der Kosten zum Ziel haben.

Zur Erreichung des Ziels werden Art und/oder Menge von Lebensmitteln bzw. Speisen in dem Speisenplan variiert. Die mathematische Formulierung des Ziels wird Zielfunktion oder Hauptbedingung genannt. Die einzuhaltenden Bedingungen heißen Nebenbedingungen. Die veränderlichen Größen in dem Modell sind Variablen. Ein Modell dieser Art wird Optimierungsmodell genannt.

Die Variablen der in der Literatur beschriebenen Optimierungsmodelle sind jeweils Lebensmittelmengen, Speisenarten, Speisemengen oder Speisenarten und -mengen.

### 2.1 Modelle mit variablen Lebensmittelmengen

Stigler (27) hat als erster ein mathematisches Modell für das „Ernährungsproblem“ formuliert. Es enthält Lebensmittelmengen als Variablen, eine Minimierung der Kosten als Zielfunktion sowie den ernährungsphysiologischen Bedarf an Energie und Nährstoffen als Nebenbedingungen. Er wollte für zwei Preissituationen (die der Jahre 1939 und 1944) jeweils eine Kost bestimmen, die für einen erwachsenen Mann die *Recommended Dietary Allowances* erfüllt und minimale Kosten verursacht. Damit wollte er die Preissituationen in den beiden Jahren vergleichen, also einen Preisindex errechnen. Hierfür betrachtete er ca. 80 Lebensmittel und neun Nährstoffe. Mit Hilfe des Modells wurden also diejenigen Mengen der vorgegebenen 80 Lebensmittel bestimmt, die den gegebenen Bedarf an neun Nährstoffen für die jeweilige Preissituation kostenminimal erfüllen.

Smith (22) erweiterte das Stigler-Modell, indem er zusätzliche Nebenbedingungen zu Mindest- und Höchstmengen einzelner Lebensmittel, Kombinationsbedingungen für einander ergänzende Lebensmittel sowie Mindestbedingungen für Lebensmittel aus Lebensmittelgruppen einführte. Die so bestimmte Kost bezeichnet er als schmackhaft (*palatable*). Er weist darauf hin, daß die Lösung umso teurer wird, je näher das Modell den üblichen Lebensmittelverbrauchsmustern angeglichen wird.

In der deutschsprachigen Literatur wurde das „Ernährungsproblem“ erstmals von Wirths/Becher/Prinz (29) in einem Optimierungsmodell behandelt.

Schmid (23, 24, 25) hat kein Optimierungsmodell formuliert. Das von Karg (14) dargestellte „Schmid-Modell“ wurde nur in Ansätzen von Schmid formuliert und von Karg erweitert.

### 2.2 Modelle mit variablen Speisenarten

Smith (22) hat mit der Formulierung von Nebenbedingungen für die Mengen einander ergänzender Lebensmittel bereits einen ersten Schritt weg von der isolierten Betrachtung der Mengen einzelner Lebensmittel getan. Peryam (20) hat in einer Diskussion zu Smith's Arbeit u.a. erkannt, daß die Variablen des Modells nicht Lebensmittel, sondern Speisen sein müssen. Er ließ die Modellformulierung selbst jedoch offen.

Balintfy (4) formulierte als erster ein Modell, bei dem die kostenminimale Kombination von Speisen gesucht wird, die bestimmten ernährungsphysiologischen Anforderungen sowie Anforderungen an die Struktur und Vielfalt des Speisenplans für eine Folge von Tagen genügt. Er verwendet bei der Modellformulierung für eine große Auswahl an Speisen je eine Binärvariable. Eine Binärvariable ist eine Variable, die nur einen von zwei verschiedenen Werten, i.d.R. null oder eins, annehmen kann. Der Wert der Variablen gibt an, ob die entsprechende Speise mit ihrer fixen Speisemenge im Speisenplan vorkommt. Der Wert eins (null) einer Variable bedeutet, daß die Speise mit ihrer fixen Speisemenge (nicht) gewählt wird. Mit diesem Modell, nachfolgend *Speisenartenmodell* genannt, werden also aus einer großen Anzahl von Speisen jene ausgewählt, die den Verzehrgewohnheiten entsprechen und einen gegebenen Nährstoffbedarf kostenminimal decken. Es berücksichtigt also nur *einen* Bedarf und ist somit auf eine homogene Zielgruppe ausgerichtet. Es fand zahlreiche Anwendungen in der Gemeinschaftsverpflegung, v.a. in Verbindung mit dem Programmsystem CAMP (*Computer Assisted Menu Planning*), dem das *Speisenartenmodell* zugrundeliegt. Der Autor baute das Modell noch weiter aus und veränderte es. So formulierte er z.B. eine Präferenzmaximierung als Zielfunktion (8, 5, 11, 12). Auch Koeffizienten (Nährstoffgehalte, -bedarfe, Verzehrgewohnheiten) mit unsicheren Werten können in dem Modell berücksichtigt werden (1). Außerdem schlug er das Modell vor zur Berechnung von Preisindices für den Vergleich

der Kosten der Lebenshaltung im Zeitverlauf (5, 6, 7). In der deutschsprachigen Literatur wurde das *Speisenartenmodell* einige Male im Bereich Gemeinschaftsverpflegung (9, 21, 19) angewendet. Stets ist bei Modellen dieser Art die Portionsmenge der gewählten Speisen fix und muß vor der jeweiligen Optimierung bestimmt werden.

### 2.3 Modelle mit variablen Speisemengen

Für die Bestimmung eines optimalen Speisenplans für evtl. mehrere Personen unterschiedlichen Bedarfs wurden in der Literatur als Gegenstück zu dem Speisenartenmodell mit seinen fixen Speisemengen solche Modelle entwickelt, in denen die Speisemenge variiert wird. Bei diesen Modellen muß jedoch die Speisenart vor der jeweiligen Optimierung bestimmt werden. Dies geschieht willkürlich oder zufällig.

Die *willkürliche* Auswahl der Speisen wurde von Karg (13) vorgeschlagen und mehrmals für Probleme des Privathaushalts und der Gemeinschaftsverpflegung angewendet (15, 16, 17, 18). Bei diesem Modell, nachfolgend *Speisemengenmodell mit vorgegebenen Speisenarten* genannt, werden zunächst, vor der Optimierung, die Speisenarten festgelegt. Dann werden in dem Optimierungsmodell innerhalb vorgegebener Unter- und Obergrenzen jene Portionsmengen der vorgegebenen Speisen gesucht, die den Energie- und Nährstoffbedarf einer Person bzw. Personengruppe kostenminimal decken. Für die Berücksichtigung der verschiedenen Nährstoffbedarfe der Personen im privaten Haushalt kann der Optimierungsschritt für jede Person separat durchgeführt werden. In (17) war nicht in jedem Fall die Bestimmung von Speisemengen möglich, die zu bedarfsgerechten Speisenplänen führt.

Die *zufällige* Auswahl von Speisen wurde von Ward/Harper/Jansen (28) formuliert. Die Autoren kombinierten die Methoden der Monte-Carlo-Simulation für die Speisenauswahl und der linearen Optimierung für die Bestimmung der Speisemenge in folgender Weise. In einem ersten Schritt wurden aus einer großen Anzahl von Speisen mit Hilfe der Monte-Carlo-Simulation zufällig solche ausgewählt, die den Verzehrsgewohnheiten entsprechen. Anschließend wurde in einem zweiten Schritt die Menge der im ersten Schritt ausgewählten Speisen so bestimmt, daß ein gegebener Nährstoffbedarf gedeckt und ein gegebenes Ziel (in diesem Fall die Minimierung der Abweichung der Speisemenge von üblichen Standardportionen) bestmöglich erreicht wird. Dieses Modell wird *Speisemengenmodell mit zufälligen Speisenarten* genannt.

### 2.4 Modelle mit variablen Speisenarten und -mengen

Für die Bestimmung eines optimalen Speisenplans für mehrere Personen unterschiedlichen Bedarfs können die in 2.2 und 2.3 beschriebenen Modelle kombiniert werden, indem sowohl Speisenarten als auch Speisemengen in dem Optimierungsmodell als Variablen formuliert werden. Es ist eine sukzessive und eine simultane Bestimmung von Speisenart und Speisemenge möglich.

Eine *sukzessive* Bestimmung wurde von Baur (9, 10) formuliert. Die Autorin bestimmte in einem ersten Schritt für eine erste Personengruppe die Speisenart nach dem *Speisenartenmodell* (jene Kombination von Speisen, die den Energie- und Nährstoffbedarf kostenminimal deckt). In einem zweiten Schritt bestimmte sie die Mengen der im ersten Schritt ausgewählten Speisen für eine zweite Personengruppe nach dem *Speisemengenmodell mit vorgegebenen Speisenarten* (jene Speisemengen, die den Energie- und Nährstoffbedarf kostenminimal decken). Dieses Modell wird *sukzessives Speisenarten- und -mengenmodell* genannt.

Die *simultane* Bestimmung von Speisenart und -menge ist aus folgendem Grund

schwierig. Die Speisenmenge muß null betragen, wenn die Speise nicht für den Speisplan gewählt wird. Wenn die Speise gewählt wird, kann die Speisenmenge zwischen vorgegebenen Unter- und Obergrenzen variiert werden. Zwischen dem Wert null und der Untergrenze besteht somit eine Lücke in der Variabilität der Speisenmenge. Diese Lücke ist nur schwer in linearen Gleichungen zu formulieren. Solche Modelle wurden von Armstrong/Sinha (2) und in Steinel (26) beschrieben.

Armstrong/Sinha (2) gingen folgendermaßen vor. Sie teilten die Menge jeder zur Auswahl stehenden Speise in zwei verschiedene Teile und verwendeten hierfür zwei verschiedene Variablen. Der erste Teil ist eine Portionsmenge von null oder einer Portion und wird von einer Binärvariable dargestellt. Der zweite Teil ist die über die Portionsmenge von eins hinausgehende Speisenmenge. Dies wird durch eine stetige Variable dargestellt, die nur dann von null verschieden ist, wenn die entsprechende Binärvariable den Wert eins angenommen hat. Speisenmengen, die von null verschieden, jedoch kleiner sind als eine Portion, werden von diesem Modell nicht zugelassen.

In Steinel (26) wird ein Modell beschrieben, das eine simultane Bestimmung von Speisenart und Speisenmenge in jeder Portionsgröße zuläßt. Mithilfe dieses Modells, das nachfolgend *simultanes Speisenarten- und -mengenmodell* genannt wird, können simultan für den Haushalt die verzehrten Speisen ausgewählt werden und für die verschiedenen Personen die Speisenmengen bestimmt werden, so daß die Verzehrsgewohnheiten des Haushalts und der Personen eingehalten werden, der Energie- und Nährstoffbedarf jeder der Personen gedeckt ist und die Kosten für den Haushalt minimal sind.

Die Verknüpfung der haushaltsspezifischen Speisenart und der personenspezifischen Speisenmenge (innerhalb vorgegebener Unter- und Obergrenzen) wird durch die Kombination von Binärvariablen und stetigen Variablen in derselben Nebenbedingung erreicht. Die einzelnen Formulierungen sind ausführlich in (26, S. 24 ff.) beschrieben.

### 3 Beurteilung der Modelle

In diesem Abschnitt soll beurteilt werden, wie die dargestellten Modelle sich für die Bestimmung einer optimalen Ernährung im privaten Mehrpersonenhaushalt eignen. Die Beurteilung erfolgt zunächst für alle Modelle allgemein und dann für ausgewählte Modelle anhand eines Beispiels.

#### 3.1 Allgemeine Beurteilung

Bei der allgemeinen Beurteilung wird nach den Variablen der Modelle unterschieden.

##### 3.1.1 Modelle mit variablen Lebensmittelmengen

Die Modelle mit variablen Lebensmittelmengen lassen die Verzehrsgewohnheiten, z.B. den Verzehr von Speisen anstelle von einzelnen Lebensmitteln, weitgehend außer acht. Sie eignen sich deshalb nicht für die Bestimmung einer optimalen Ernährung in Wohlstandssituationen. Für die Bestimmung einer optimalen Ernährung in Notlagen, wie sie in Krisensituationen (z.B. Notrationen) oder in Entwicklungsländern vorkommen, sind diese Modelle geeignet. Diese Situationen stehen jedoch im vorliegenden Beitrag außerhalb der Betrachtung.

### 3.1.2 Modelle mit variablen Speisenarten

Die Modelle mit variablen Speisenarten lassen während einer Optimierung keine Variation der Speisemenge zu. Sie sind deshalb nicht geeignet für die Bestimmung einer optimalen Ernährung im privaten Mehrpersonenhaushalt, wo verschiedene Personen gleiche Speisen in verschiedenen Mengen verzehren. Diese Modelle sind geeignet für die Bestimmung einer optimalen Ernährung in der Gemeinschaftsverpflegung, wo eine Variation der Speisemenge bei einigen Speisen schon aus produktionstechnischen Gründen vielfach ausgeschlossen ist.

### 3.1.3 Modelle mit variablen Speisemengen

Bei der Beurteilung der Modelle mit variablen Speisemengen sind das *Speisemengenmodell mit vorgegebenen Speisenarten* und das mit *zufälligen Speisenarten* zu unterscheiden.

Das *Speisemengenmodell mit vorgegebenen Speisenarten* eignet sich für solche Probleme im privaten Mehrpersonenhaushalt, bei denen die Speisenart bereits feststeht. Dies bedeutet jedoch eine starke Einschränkung bezüglich der Bestimmung der optimalen Ernährung. Zum einen hat die Speisenart einen wesentlich stärkeren Einfluß auf Bedarfsdeckung und Akzeptabilität des Speisenplans als die Speisemenge, die zweitrangig nach der Speisenart zu betrachten ist. Zum anderen kann es vorkommen, daß bei der willkürlich gewählten Speisenart kein bedarfsgerechter und akzeptabler Speisenplan gefunden werden kann. Dies stellt zugleich eine Schwäche und eine Stärke dieses Modells dar. Die Schwäche liegt darin, daß möglicherweise eine optimale Ernährung nicht bestimmt werden kann. Die Stärke liegt darin, daß hiermit gezeigt wird, daß für bestimmte Verzehrgewohnheiten (z.B. bei bereits festgelegter Speisenart) eine bedarfsgerechte Ernährung nicht möglich ist. Aufgrund dieser Merkmale eignet sich das *Speisemengenmodell mit vorgegebenen Speisenarten* nur bedingt für die Bestimmung einer optimalen Ernährung im privaten Haushalt. Eine Kombination dieses Modells mit einer vorangehenden optimalen Speisenauswahl wird bei den *Speisenarten- und -mengenmodellen* behandelt.

Das *Speisemengenmodell mit zufälligen Speisenarten* kombiniert die Monte-Carlo-Simulation für die Speisenauswahl mit der linearen Optimierung für die Bestimmung der Speisemengen. Dies hat den Vorteil gegenüber dem *Speisemengenmodell mit vorgegebenen Speisenarten*, daß die Willkür bei der Speisenauswahl ausgeschaltet ist. Es hat jedoch zwei Nachteile. Zum einen ist der Rechenaufwand sehr erheblich, da je nach Anzahl der zur Verfügung stehenden Speisen sehr viele Kombinationen möglich sind. Zum anderen ist auch nach sehr vielen Zufallsgenerierungen ein Optimum bezüglich der Speisenauswahl nicht zu erreichen und es gelten die oben genannten Nachteile bezüglich der Optimalität des resultierenden Speisenplans.

### 3.1.4 Modelle mit variablen Speisenarten und -mengen

Die Modelle mit variablen Speisenarten und -mengen stellen die komplexesten der dargestellten Modelle dar. Es ist zwischen *sukzessivem* und *simultanem Speisenarten- und -mengenmodell* zu unterscheiden.

Das *sukzessive Speisenarten- und -mengenmodell* wurde nicht für den privaten Mehrpersonenhaushalt formuliert, sondern für die Gemeinschaftsverpflegung. Da hierbei jedoch verschiedene Personengruppen mit unterschiedlichem Nährstoffbedarf be-

rücksichtigt werden, ist eine Übertragung auf den privaten Mehrpersonenhaushalt ohne Modifizierung des Modells möglich. Bezüglich der Optimalität des resultierenden Speisenplans gilt jedoch folgende Einschränkung. Im ersten Schritt wird die Speisenart nach dem *Speisenartenmodell* ausgewählt. Die Speisenmenge ist dabei fix. Diese Festlegung der Speisenmenge ist sachlich unbegründet, da eine nachträgliche Änderung der Speisenmenge im zweiten Optimierungsschritt zugelassen wird. Es handelt sich deshalb hierbei um eine unnötige Einschränkung in der Variabilität und damit auch in der Optimalität der Lösung.

Das *simultane Speisenarten- und -mengenmodell* nach Armstrong/Sinha (2) wurde nicht für den Mehrpersonenhaushalt formuliert. Es kann nur *einen* Nährstoffbedarf berücksichtigen. Es muß deshalb aus der weiteren Beurteilung anhand des Beispielproblems ausgeschlossen werden.

Das *simultane Speisenarten- und -mengenmodell* nach Steinel (26) ist unter den dargestellten Modellen dasjenige, das die größte Variabilität von Speisenart und -menge aufweist. Deshalb gelten die für die übrigen Modelle aufgeführten Einschränkungen in der Optimalität der Lösung hier nicht.

### 3.2 Beurteilung anhand eines Beispielproblems

Im folgenden wird anhand eines Beispielproblems beurteilt, wie die verschiedenen *Speisenmengenmodelle mit vorgegebenen* oder *zufälligen Speisenarten* sowie das *sukzessive* und das *simultane Speisenarten- und -mengenmodell* den Modellzweck erfüllen. Dazu wird zunächst das Problem dargestellt. Anschließend werden die Lösungen des Problems mit den verschiedenen Modellen erläutert und diskutiert.

#### 3.2.1 Problem

*Gegeben* sind vier Speisengruppen mit jeweils vier Speisen sowie der Gehalt an zehn Nährstoffen und die Lebensmittelkosten der 16 Speisen. Die Speisengruppen (Speisen) sind Vorsuppen (Blumenkohlsuppe, Gemüsesuppe, Möhrensuppe, Kartoffelsuppe), Fleischspeisen (Königsberger Klopse, Putenkeule, Leber, Brathähnchen), stärkereiche Beilagen (Reis, Nudeln, Semmelknödel, Petersilienkartoffeln) und Gemüsebeilagen (Kopfsalat, Spinat, Erbsen, Tomatensalat). Die berücksichtigten Nährstoffe sind Energie, Eiweiß, Fett, Natrium, Calcium, Eisen sowie die Vitamine A, B<sub>1</sub>, B<sub>2</sub> und C. Der Nährstoffgehalt und die Lebensmittelkosten (LMK) der Speisen sind in Tab. 1 wiedergegeben. Gegeben ist weiterhin ein Haushalt mit zwei Personen, wobei die beiden Personen unterschiedlichen Nährstoffbedarf haben. Der Nährstoffbedarf für die Personen ist in Tab. 2 aufgeführt. Es handelt sich dabei um eigene Annahmen. Speisenmengen werden akzeptiert, wenn sie zwischen 0,6 und 1,6 Portionen liegen. Beim *Speisenmengenmodell mit vorgegebenen Speisenarten* sind die Speisenarten auf Blumenkohlsuppe, Königsberger Klopse, Reis und Kopfsalat festgelegt. Für die übrigen Modelle wird die vereinfachende Annahme getroffen, daß alle Speisenkombinationen akzeptiert werden.

*Gesucht* sind Speisenart und Speisenmenge eines Menüs, das aus einer Vorsuppe, einer Fleischspeise, einer stärkereichen Beilage und einer Gemüsebeilage in jeweils akzeptablen Mengen besteht, den Nährstoffbedarf jeder der beiden Personen deckt und minimale Lebensmittelkosten aufweist. Es sind also für beide Personen die gleichen Speisen in unterschiedlichen Mengen zu bestimmen.

Tab. 1. Nährstoffgehalt und Lebensmittelkosten der Speisen des Beispielproblems

Speisen	Merkmale der Speisen pro Portion										
	LMK [DM]	Ener- gie [kcal]	Ei- weiß [g]	Fett [g]	NaCl [g]	Ca [mg]	Fe [mg]	VitA [mg]	Vit B <sub>1</sub> [mg]	Vit B <sub>2</sub> [mg]	Vit C [mg]
Speisengruppe: Vorsuppen											
Blumenkohl- suppe	0,33	90	2	5,3	1,0	27	0,8	0,1	0,07	0,08	37
Gemüsesuppe	0,62	85	2	4,4	1,7	47	0,8	0,46	0,08	0,05	29
Möhrensuppe	0,21	79	1	4,1	1,0	26	0,5	1,05	0,04	0,03	6
Kartoffelsuppe	0,34	86	2	3,3	1,2	27	0,8	0,16	0,10	0,06	21
Speisengruppe: Fleischspeisen											
Königsberger Klopse	0,96	331	18	21,4	1,2	28	2,4	0,02	0,1	0,16	0
Putenkeule	1,5	254	29	13	1,3	4	2,8	0,02	0,13	0,26	1
Leber	0,94	190	19	9,0	0,6	13	20,6	5,42	0,29	2,95	22
Brathähnchen	1,68	318	38	15,2	1,4	32	3,5	0,1	0,16	0,3	11
Speisengruppe: Stärkereiche Beilagen											
Reis	0,26	221	4	0,3	0,9	3	0,3	0	0,03	0,01	0
Nudeln	0,35	233	7	1,6	0,9	16	0,9	0,03	0,1	0,04	0
Semmelknödel	1,04	411	18	10,4	1,8	149	2,4	0,15	0,18	0,33	3
Petersilienkar- toffeln	0,49	212	4	4,3	0,8	22	1,6	0,05	0,22	0,09	36
Speisengruppe: Gemüsebeilagen											
Kopfsalat	0,45	58	0	5,0	0,2	24	0,7	0,08	0,03	0,04	9
Spinat	0,41	106	5	4,6	1,8	255	8,2	1,42	0,22	0,46	105
Erbsen	1,43	232	4	6,8	1,0	54	3,8	0,18	0,6	0,32	53
Tomatensalat	0,50	70	1	5,1	0,2	20	0,6	0,15	0,06	0,04	27

Quelle: (3)

### 3.2.2 Lösung

Die Ergebnisse der Berechnungen zu dem Beispielproblem mit Hilfe der verschiedenen Modelle sind in Tab. 3 aufgeführt.

Die Lösung des Problems mit Hilfe des *Speisenmengenmodells mit vorgegebenen Speisenarten* war im ersten Schritt nicht möglich. Der in Tab. 2 aufgeführte Nährstoffbedarf der beiden Personen kann mit den Speisen Blumenkohl-  
suppe, Königsberger



Tab. 2. Nährstoffbedarf der Personen in dem Beispielproblem

Nährstoff	Bedingung	Bedarf pro Menü bei	
		Person 1	Person 2
Energie [kcal]	$\geq$	782	801
Energie [kcal]	$\leq$	1043	1062
Eiweiß [g]	$\geq$	18	20
Fett [g]	$\geq$	21,5	21,5
Fett [g]	$\leq$	40	45
Natriumchlorid [g]	$\leq$	5,0	5,0
Calcium [mg]	$\geq$	240	240
Eisen [mg]	$\geq$	5,4	6,5
Vitamin A [mg]	$\geq$	0,27	0,35
Vitamin B <sub>1</sub> [mg]	$\geq$	0,07	0,1
Vitamin B <sub>2</sub> [mg]	$\geq$	0,6	0,65
Vitamin C [mg]	$\geq$	30	35

Klopse, Reis und Kopfsalat nicht gedeckt werden. Dies betrifft v.a. den Bedarf an Calcium und Eisen (vgl. Tab. 1 und 2). Deshalb wurde eine zunächst für die Kombination vorgeschriebene Speise durch eine andere Speise ausgetauscht. Die Speise Reis wurde durch die calcium- und eisenreichere Speise Semmelknödel ausgetauscht. Anschließend erfolgte eine erneute Optimierung mit dem Speisemengenmodell, die zu dem in Tab. 3 aufgeführten Ergebnis führt. Das Menü besteht aus Blumenkohlsuppe, Königsberger Klopse, Semmelknödel und Kopfsalat in Portionsmengen, die zwischen 0,6 und 1,6 Portionen liegen.

Mit dem *Speisemengenmodell mit zufälligen Speisenarten* wurden im ersten Schritt zehn Kombinationen von Speisen zufällig generiert. Für acht dieser zehn Kombinationen war keine Lösung des Problems möglich. Der Nährstoffbedarf der Personen konnte mit den zufällig kombinierten Speisen nicht gedeckt werden. Von den zwei verbleibenden Speisekombinationen, für die eine Lösung möglich war, ist jene mit den niedrigeren Minimalkosten in Tab. 3 eingetragen. Es handelt sich um die Speisen Gemüsesuppe, Königsberger Klopse, Nudeln und Spinat. Bei Gemüsesuppe beträgt die Portionsmenge bei beiden Personen 0,6. Bei den übrigen Speisen sind die Portionsmengen der beiden Personen unterschiedlich.

Nach dem *sukzessiven Speisenarten- und -mengenmodell* wird im ersten Schritt aus jeder Speisengruppe je eine Speise ausgewählt, so daß der Nährstoffbedarf der Person 1 kostenminimal gedeckt ist. Die ausgewählten Speisen sind Möhrensuppe, Leber, Semmelknödel und Erbsen. Die Speisemenge beträgt entsprechend der Vorgabe jeweils 1. Im zweiten Schritt werden für Person 2 die Mengen der im ersten Schritt ermittelten Speisen so bestimmt, daß der Nährstoffbedarf der Person 2 kostenminimal gedeckt ist. Die optimalen Speisemengen für Person 2 sind ebenfalls in Tab. 3 eingetragen.

Tab. 3. Optimale Speisenpläne für das Beispielproblem nach den verschiedenen Modellen

Speisen- gruppe	Speisenart	Optimale Speisenmenge nach dem							
		Speisenmengenmodell mit				Speisenarten- und -mengenmodell			
		vorgegebe- nen Spei- senarten		zufälligen Speisen- arten		sukzessiv		simultan	
		für Person							
		1	2	1	2	1	2	1	2
Vorsuppen	Blumenkohlsuppe	0,6	1,6	–	–	–	–	–	–
	Gemüsesuppe	–	–	0,6	0,6	–	–	–	–
	Möhrensuppe	–	–	–	–	1,0	0,6	0,95	0,66
	Kartoffelsuppe	–	–	–	–	–	–	–	–
Fleischspeisen	Königsberger Klopse	0,6	0,95	0,82	1,15	–	–	0,76	0,86
	Putenkeule	–	–	–	–	–	–	–	–
	Leber	–	–	–	–	1,0	0,6	–	–
	Brathähnchen	–	–	–	–	–	–	–	–
Stärkereiche Beilagen	Reis	1) <sup>1)</sup>	1) <sup>1)</sup>	–	–	–	–	1,6	1,6
	Nudeln	–	–	1,6	1,2	–	–	–	–
	Semmelknödel	1,31	1,05	–	–	1,0	1,24	–	–
	Petersilienkartoffeln	–	–	–	–	–	–	–	–
Gemüse- beilagen	Kopfsalat	0,6	0,6	–	–	–	–	–	–
	Spinat	–	–	0,81	0,84			0,94	1,04
	Erbsen	–	–	–	–	1,0	0,6	–	–
	Tomatensalat	–	–	–	–	–	–	–	–

<sup>1)</sup> mit dem *Speisenmengenmodell mit vorgegebenen Speisenarten* konnte keine zulässige Lösung für die gewünschte Kombination ‚Blumenkohlsuppe, Königsberger Klopse, Reis, Kopfsalat‘ gefunden werden. Deshalb wurde die Speise Reis durch die Speise Semmelknödel ausgetauscht.

Nach dem *simultanen Speisenarten- und -mengenmodell* werden in einem Schritt für den Haushalt die Art und für die beiden Personen jeweils die Menge der Speisen bestimmt, die den Nährstoffbedarf der beiden Personen kostenminimal decken. Es werden die Speisen Möhrensuppe, Königsberger Klopse, Reis und Spinat gewählt. Bei Reis liegt die Portionsmenge bei beiden Personen an der Obergrenze von 1,6. Bei den übrigen Speisen unterscheiden sich die Speisenmengen für die beiden Personen.

Die minimalen Kosten der nach den verschiedenen Modellen ermittelten normativen Speisenpläne sind in Tab. 4 dargestellt. Nach dem *Speisenmengenmodell mit vorgegebenen Speisenarten* betragen die minimalen Kosten des Menüs für den Haushalt 5,21 DM, nach dem *Speisenmengenmodell mit zufälligen Speisenarten* 4,29 DM, nach dem *sukzessiven Speisenarten- und -mengenmodell* 6,45 DM, nach dem *simultanen Speisenarten- und -mengenmodell* 3,54 DM, das ist etwas mehr als die Hälfte der mit dem *sukzessiven* Modell bestimmten minimalen Kosten.

Tab. 4. Kosten der optimalen Speisenpläne des Beispielproblems nach den verschiedenen Modellen

Modell		Kosten in DM für		
		Person 1	Person 2	Haushalt
Speisenmengenmodell mit	vorgegebenen Speisenarten	2,41	2,80	5,21
	zufälligen Speisenarten	2,05	2,24	4,29
Speisenarten- und -mengenmodell	sukzessiv	3,62	2,83	6,45
	simultan	1,73	1,81	3,54

### 3.2.3 Diskussion

Die reale Entscheidungssituation zur Bestimmung der optimalen Ernährung im privaten Haushalt stellt sich in folgender Weise dar. Gesucht ist ein bedarfsgerechter, akzeptabler und ökonomisch rationaler Speisenplan, bei dem verschiedene Personen mit unterschiedlichem Nährstoffbedarf gleiche Speisen in unterschiedlichen Mengen verzehren.

Wenn die Art der Speisen, die verzehrt werden, bereits vom Haushalt festgelegt ist, kann für das verbleibende Entscheidungsproblem das *Speisenmengenmodell mit vorgegebenen Speisenarten* herangezogen werden. Es kann dann zwei wesentliche Beiträge zur Verbesserung der Ernährung leisten. Zum einen kann es zeigen, daß für eine gegebene Speisenkombination (hier: Blumenkohlsuppe, Königsberger Klopse, Reis, Kopfsalat) kein bedarfsgerechtes Menü zusammengestellt werden kann. Zum anderen kann durch Ersetzen einzelner Speisen durch andere Speisen versucht werden, einen bedarfsgerechten Speisenplan zu finden. Wenn ein bedarfsgerechter Speisenplan möglich ist, wird zugleich der optimale bestimmt. Die Suche nach dem bedarfsgerechten Speisenplan wird jedoch nicht vom Modell geleistet, sondern muß vom Anwender durchgeführt werden. Dies hat Vorteile und Nachteile. Der Vorteil liegt darin, daß der Anwender die Speisenart selbst bestimmen kann. Der Nachteil liegt darin, daß die Suche nach dem bedarfsgerechten Speisenplan aufwendig ist und möglicherweise zu keinem Ergebnis führt. Obwohl das Modell hierbei Unterstützung bieten könnte, wird sie nicht genutzt. Für das *Speisenmengenmodell mit zufälligen Speisenarten* gilt ähnliches wie für das mit *vorgegebenen Speisenarten*. Jedoch wird hierbei die Suche nach einem bedarfsgerechten Speisenplan vom Modell übernommen. Die Möglichkeiten des Haushalts, auf die Speisenart Einfluß zu nehmen, sind eingeschränkt. Die Speisenarten können nicht mehr vorgegeben werden. Jedoch können unerwünschte Speisen bzw. Speisenkombinationen

ausgeschlossen werden. Dies erweitert die Möglichkeiten des Modells, den optimalen Speisenplan zu suchen. Da die Suche nicht gezielt, wie beim *Modell mit vorgegebenen Speisenarten*, sondern zufällig erfolgt, liegt der Rechenaufwand hier höher. Der Aufwand für den Anwender ist bei dem *Modell mit zufälligen Speisenarten* geringer als bei dem *Modell mit vorgegebenen Speisenarten*.

Bei den *Speisenarten- und -mengenmodellen* wird die Speisenart jeweils vom Modell durch Optimierung bestimmt. Die Möglichkeiten des Haushalts, auf die Speisenart Einfluß zu nehmen, sind hierbei ebenfalls eingeschränkt, jedoch nicht so stark wie beim *Speisenmengenmodell mit zufälligen Speisenarten*. Unerwünschte Speisen bzw. Speisenkombinationen können ausgeschlossen werden. Einzelne erwünschte Speisen bzw. Speisenkombinationen können als Nebenbedingungen der Verzehrgeohnheiten in den Speisenplan aufgenommen werden. Die Bestimmung von Speisenart und Speisenmenge geschieht bei den beiden Modellen sukzessive oder simultan. Zunächst ist anzunehmen, daß beide Verfahren zu dem gleichen Ergebnis führen. Dies ist jedoch nicht der Fall, wie das Beispielproblem gezeigt hat. Beim *sukzessiven Modell* werden andere, ungünstigere (d.h. teurere) Speisen ausgewählt als beim *simultanen Modell*. Dies liegt an der Festlegung der Portionsmenge beim ersten Schritt des *sukzessiven Modells*. Diese Festlegung, die sachlich unbegründet ist, führt zu den wesentlich höheren Minimalkosten beim *sukzessiven Modell* im Vergleich zum *simultanen Modell* (vgl. Tab. 4).

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß das Beispielproblem (mit seinen wenigen, zur Auswahl stehenden Speisen) die realen Entscheidungsprobleme nur unzureichend abbildet. Deshalb erscheinen im Ergebnis des Beispielproblems unübliche Speisenkombinationen (vgl. Tab. 3). Werden mehr Speisen zur Auswahl gestellt, wird dieser Mangel jedoch behoben, wie die resultierenden Speisenpläne in (26) zeigen.

#### 4 Ausblick

Im vorliegenden Beitrag besteht das „Ernährungsproblem“ darin, eine bedarfsgerechte, akzeptable und ökonomisch rationale Ernährung zu bestimmen. Es wurde gezeigt, daß dieses Problem mit Hilfe von Optimierungsmodellen gelöst werden kann. Damit die Modelle in Zukunft nicht nur in der Ernährungswissenschaft, sondern auch in der Ernährungspraxis Anwendung finden können, müssen sie zwei Bedingungen erfüllen. Sie müssen realitätsnah und anwenderfreundlich sein. Die Realitätsnähe zur Situation im privaten Haushalt konnte im *simultanen Speisenarten- und -mengenmodell* gegenüber bisherigen Modellen verbessert werden. Die Anwenderfreundlichkeit der Modelle ist nach wie vor unbefriedigend, da eine Vielzahl von Daten und Bedingungen in eine sehr komplexe Form aufbereitet werden müssen. Die Anwenderfreundlichkeit kann wesentlich verbessert werden, indem die Datenaufbereitung von Schnittstellen übernommen wird. Wenn es in der weiteren Entwicklung gelingt, durch geeignete Benutzeroberflächen die Anwenderfreundlichkeit zu verbessern, können Optimierungsmodelle in der Zukunft praktisch angewendet werden. In der Ernährungsberatung des Privathaushalts können in solchen Anwendungen konkrete und individuelle Informationen in Form von Empfehlungen bereitgestellt werden, deren Einhaltung einen Beitrag zur Verbesserung des Ernährungs- und Gesundheitsstatus der Bevölkerung leisten.

*Literatur*

1. Armstrong RD, Balintfy JL (1975) A chance constrained multiple choice programming algorithm. *Operation Research* 23:494–510
2. Armstrong RD, Sinha P (1974) Application of quasi-integer programming to the solution of menu planning problems with variable portion size. *Management Science* 21:474–482
3. Auswertungs- und Informationsdienst für Ernährung, Landwirtschaft und Forsten (AID) (1984) Daten zur Analyse der Ernährung; Bonn (Karte mit Beiheft)
4. Balintfy JL (1964) Menu planning by computer. *Communications of the ACM* 7:255–259
5. Balintfy JL (1979) The cost of decent subsistence. *Management Science* 25:980–989
6. Balintfy JL, Neter J, Wasserman W (1970a) An experimental comparison between fixed weight and linear programming food price indexes. *Journal of the American Statistical Association* 65:49–60
7. Balintfy JL, Neter J, Wasserman W (1970b) Binary and chain comparisons with an experimental linear programming food price index. *The Review of Economics and Statistics* 52:324–330
8. Balintfy JL, Ross GT, Sinha P, Zoltners AA (1978) A mathematical programming system for preference and compatibility maximized menu planning and scheduling. *Mathematical Programming* 15:63–76
9. Baur E (1981) Optimale Menüs für ausgewählte Systeme der Schulverpflegung und Schülergruppen. München, Technische Universität, Fakultät für Landwirtschaft und Gartenbau, Diss.
10. Baur E, Karg G (1982) Optimale Menüs für ausgewählte Systeme der Schulverpflegung und Schülergruppen. *Hauswirtsch Wiss* 30:118–127
11. Bognár A, Balintfy JL (1982a) Anwendung einer quadratischen Programmierungsmethode für die Optimierung der Speisenplanung (Teil 1). *Ernährungs-Umschau* 29:126–128
12. Bognár A, Balintfy JL (1982b) Anwendung einer quadratischen Programmierungsmethode für die Optimierung der Speisenplanung (Teil 2). *Ernährungs-Umschau* 29:154–158
13. Karg G (1980) Bedarfsgerechte und kostengünstige Ernährung im Familienhaushalt. In: Kuratorium für Technik und Bauwesen in der Landwirtschaft (Hrsg), Entscheidungsbereich Haushalt, Darmstadt (KTBL-Schrift 257), S 49–63
14. Karg G (1982) Modelle zur Bestimmung einer optimalen menschlichen Ernährung. *Hauswirtsch Wiss* 30:34–47
15. Karg G (1985) Ist der Regelsatz ausreichend für eine bedarfsgerechte Ernährung? In: Auswertungs- und Informationsdienst für Ernährung, Landwirtschaft und Forsten e.V. (AID) (Hrsg), Ernährungsverhalten bei sinkendem Realeinkommen, Bonn (Schriftenreihe AID-Verbraucherdienst), S 19–29
16. Karg G, Keck J (1982) Optimale Ernährung in der Gemeinschaftsverpflegung mit Hilfe der linearen und quadratischen Optimierung. *Ernährungs-Umschau* 29:260–268
17. Karg G, Keck J, Lehmann M (1984) Vergleich von Qualität und Kosten verschiedener Ernährungsformen. *Ernährungs-Umschau* 31:363–370
18. Karg G, Piekarski J, Kellmayer M (1984) Kosten einer bedarfsgerechten Ernährung in Sozialhilfeempfänger-Haushalten. *Hauswirtsch Wiss* 32:195–204
19. Lehmann M (1990) Computerunterstützte Produktionsplanung in der Gemeinschaftsverpflegung. München, Technische Universität, Fakultät für Landwirtschaft und Gartenbau, Diss.
20. Peryam DR (1959) Discussion: Linear programming models for the determination of palatable human diets. *Journal of Farm Economics* 41:302–305
21. Rutzmoser E (1982) Optimale Ernährung in der Gemeinschaftsverpflegung dargestellt an der Teilverpflegung von Studenten in einer Mensa. München, Technische Universität, Fakultät für Landwirtschaft und Gartenbau, Diss.
22. Smith VE (1959) Linear programming models for the determination of palatable human diets. *Journal of Farm Economics* 41:272–283
23. Schmid J (1968) Computerdiät bei Lebererkrankungen. *Impuls (Wien)* 10:714–720
24. Schmid J (1969) Menu-Planung mittels Datenverarbeitung. *Hippokrates* 23:908–914
25. Schmid J, Campbell G (1967) Computer Diät. *Impuls (Wien)* 5:363–380
26. Steinel M (1992) Normativer Kosten-Nutzen-Vergleich verschiedener Ernährungsformen im privaten Haushalt. Lang, Frankfurt/Main (Studien zur Haushaltsökonomie, Bd 8)
27. Stigler GJ (1945) The cost of subsistence. *Journal of Farm Economics* 27:303–314
28. Ward RC, Harper JM, Jansen NB (1978) Monte Carlo simulation of nutrient based serving sizes of food. *Journal of Food Processing and Preservation* 2:155–174

29. Wirths W, Becher A, Prinz W (1966) Versuche zur Berechnung von Minimalkosten der menschlichen Ernährung mit Hilfe der Linearen Programmierung. *Z Ernährungswiss* 5:39–56

Eingegangen 3. September 1992  
akzeptiert 6. November 1992

Anschrift der Verfasserin:

Dr. Margot Steinell, Technische Universität München, Institut für Sozialökonomik des Haushalts,  
Lehrstuhl für Wirtschaftslehre des Haushalts, Weihenstephaner Steig 17, W-8050 Freising